MAT 498 Projektif Geometri Final Sınavı(14.06.2021)

Adı Soyadı:

Numarası:

1	2	3	4	5	Toplam

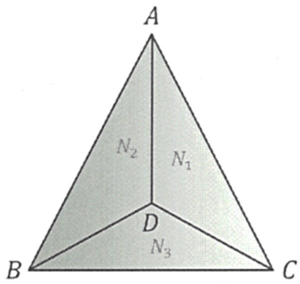
1.) $\mathcal{N} = \{N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8, N_9, N_{10}, N_{11}, N_{12}, N_{13}\}$,

$\mathcal{D} = \{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8, d_9, d_{10}, d_{11}, d_{12}, d_{13}\}$ ve üzerinde bulunma bağıntısı aşağıdaki çizelgede ″ $N_i \circ d_j \Leftrightarrow i.$ satır $j.$ kolonda ■ görülüyor ‶ ile tanımlanmak üzere $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ sisteminin bir projektif düzlem olup olmadığını araştırınız.

$\circ$	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}
N_1	■			■				■			■		
N_2			■				■			■	■		
N_3		■			■				■		■		
N_4	■		■		■	■							
N_5				■		■	■		■				
N_6		■				■		■		■			
N_7	■								■	■		■	
N_8					■		■	■				■	
N_9		■	■	■								■	
N_{10}	■	■					■						■
N_{11}			■					■	■				■
N_{12}				■	■					■			■
N_{13}						■					■	■	■

2.) Verilen her F cismi için nokta ve doğruları bu cismin elemanlarıyla cebirsel olarak belirtilebilen bir afin düzlemin var olduğunu ispatlayınız.

3.) Öklid uzayında köşeleri A, B, C, D olan şekildeki dört yüzlüyü göz önüne alalım. $\mathcal{N}$ ile bu dört yüzlünün ABC, ABD, ADC ve DBC yüzlerinin(üçgenlerinin) kümesini; $\mathcal{D}$ ile de AB, AC, AD, BC, BD ve CD ayrıtlarının(doğru parçalarının) kümesini gösterelim. $N \in \mathcal{N}$ ve $d \in \mathcal{D}$olmak üzere üzerinde bulunma bağıntısı



″ $N \circ d \Leftrightarrow d, N$ nin bir kenarıdır ‶ ile tanımlanmak üzere $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ sisteminin bir afin düzlem olup olmadığını araştırınız.

4.) Bir $\mathbb{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ projektif düzleminde farklı iki doğrunun bir tek noktada kesiştiğini gösteriniz.

5.) Bir Afin düzleminde birbirine paralel doğrulardan oluşan herhangi iki kümenin aynı sayıda elemanı olduğunu ve bu sayının düzlemin mertebesine eşit olduğunu gösteriniz. Böyle $n + 1$ tane kümenin (paralel doğru demetinin) var olduğunu gösteriniz.

NOT: Süre 120 dakikadır. BAŞARILAR. *Prof. Dr. Ayhan TUTAR*

CEVAPLAR

C-1) (P1): Farklı iki noktadan bir tek doğru geçer mi?

$N_1, N_2 \in \mathcal{N}$, $N_1 \neq N_2$ için $N_1 \circ d_{11}$, $N_2 \circ d_{11} \Rightarrow N_1N_2 = d_{11}$ olup N_1 ve N_2 den geçen başka doğru yoktur.

$N_7, N_8 \in \mathcal{N}$ için $N_7 \circ d_{12}$, $N_8 \circ d_{12} \Rightarrow N_7N_8 = d_{12}$ olup N_7 ve N_8 den geçen başka bir doğru yoktur.

Her farklı iki nokta için bu söylenebilir. O halde (P1) aksiyomu sağlanır.

(P2): Farklı iki doğru tek bir noktada kesişir mi?

$d_{11}, d_{12} \in \mathcal{D}$ için $d_{11} \wedge d_{12} = N_{13}$ olacak şekilde bir tek $N_{13} \in \mathcal{N}$ vardır. $d_5, d_6 \in \mathcal{D}$ için $d_5 \wedge d_6 = N_4$ olacak şekilde bir tek $N_4 \in \mathcal{N}$ vardır.

Benzer şekilde farklı iki doğrular çoğaltılabilir. Yani herhangi iki kolonda aynı satır numaralı birer tek kare kutu olduğundan iki doğru bir ortak noktaya sahiptir.

(P3): Herhangi üçü doğrudaş olmayan 4 nokta var mıdır?

$\underbrace{N_1, N_2}_{d_{11}}, \underbrace{N_4, N_5}_{d_6}$ böyle bir dörtlüdür.

Mat 498 Projektif Geometri

C-2) $(F,+,\cdot)$ cismi verilsin. Bu F cismi yardımıyla analitik olarak tanımlanan $\mathcal{N} = F\times F = \{(x,y) \mid x,y\in F\}$, $\mathcal{D}=\{[m,b] \mid m,b\in F\}\cup\{[a] \mid a\in F\}$ ve

$\circ$: üzerinde bulunma bağıntısı

$$(x,y)\circ[m,b] \Leftrightarrow y=mx+b$$

$$(x,y)\circ[a] \Leftrightarrow x=a$$

ile tanımlansın. $(\mathcal{N},\mathcal{D},\circ)$ sisteminin bir afin düzlem olduğunu görelim.

A1) $x_i, y_i \in F$, $i=1,2$, o.ü. verilen (x_1,y_1) ve (x_2,y_2) noktalarını birleştiren doğru

$$x_1\neq x_2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}(x_1,y_1)\circ[m,b]\Rightarrow y_1=mx_1+b\\ (x_2,y_2)\circ[m,b]\Rightarrow y_2=mx_2+b\end{array}\right\} \text{ m ve b yi çözeceğiz.}$$

$y_1-y_2=m(x_1-x_2)$ dir. $x_1\neq x_2$ old. dan $x_1-x_2\neq 0 \Rightarrow (x_1-x_2)^{-1}$ vardır.

O halde m'yi çözebiliriz. $m=(y_1-y_2)(x_1-x_2)^{-1}$. $y_1=mx_1+b$ de m nin değerini yerine yazarsak $b=y_1-mx_1=y_1-(y_1-y_2)(x_1-x_2)^{-1}x_1=(x_1y_2-y_1x_2)(x_1-x_2)^{-1}$

$\Rightarrow [m,b]=[(y_1-y_2)(x_1-x_2)^{-1}; (x_1y_2-y_1x_2)(x_1-x_2)^{-1}]$;

$x_1=x_2$ ise $x_1-x_2=0$ old. dan $(x_1-x_2)^{-1}$ mevcut değildir. Dolayısıyla m çözülemez. Bu durumda (x_1,y_1), (x_2,y_2) noktalarının ikisi de $[x_1]\in\mathcal{D}$ doğrusu üzerindedir. Dolayısıyla (A1) aksiyomu sağlanır.

(A2): $N=(u,v)$ noktası ve $d=[m,b]$ doğrusu verilmiş olsun.

$N\not\circ d \Rightarrow (u,v)\not\circ[m,b] \Rightarrow v\neq mu+b$.

N den geçen d' doğrusunu $[m',b']$ ile gösterirsek $v=m'u+b' \Rightarrow b'=v-m'u$ olur.

Bu durumda; $[m',b']=[m',v-m'u]$ olur.

Eğer $m\neq m'$ ise $[m,b]$ ve $[m',v-m'u]$ doğrusunun bir ortak noktası olduğu hesaplamalarla görülür. Fakat $m=m'$ ise bu doğruların ortak noktası yoktur.

(u,v) den geçen ve $[m,b]$ ya da $[a]$ ya paralel olan doğru, sırasıyla, $[m, v-mu]$ ya da $[u]$ dur.

Açıklama: $[m,b]$ ve $[m,b']$ paraleldir.

$[m,b]$ ve $[a]$ tipindeki doğrular paralel olamazlar.

Mat 498 Projektif Geometri

(A3) : (0,0), (0,1), (1,0) noktalarını alalım. Bu üç nokta her cisim için vardı

Bu üç noktanın doğrudaş olmadığını araştıralım:

$y = mx + n$ ($N = (x,y) \in \mathcal{N}$ ve $d = [m,b] \in \mathcal{D}$ için $N o d \Rightarrow y = mx + b$ dir).

$(0,0) \circ [m,b] \Rightarrow b = 0$

$(1,0) \circ [m,b] \Rightarrow m = -b = 0$

$\Rightarrow$ (0,0) ve (1,0) noktalarından geçen doğru [0,0] dır. (0,1) noktasının bu doğru üzerinde olup olmadığını araştıralım:

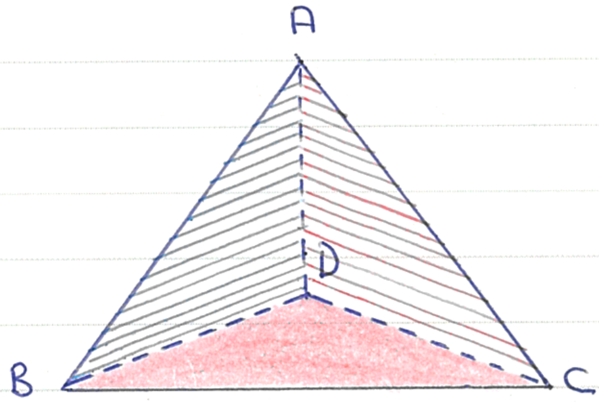
$(0,1) \circ [0,0] \Rightarrow 1 = 0.0 + 0$ olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, $(0,1) \not\circ [0,0]$ dır. Dolayısıyla (A3) aksiyomu sağlanmış. olur.

C-3) Öklid uzayında köşeleri A, B, C, D olan bir dört yüzlüyü gözönüne alalım. $\mathcal{N}$ ile bu dört yüzlünün ABC, ABD, ADC ve DBC yüzlerinin (üçgenlerinin) kümesini; $\mathcal{D}$ ile de AB, AC, AD, BC, BD ve CD ayrıtlarının (doğru parçalarının) kümesini gösterelim (Şekil 1).

$N \in \mathcal{N}$ ve $d \in \mathcal{D}$ olmak üzere üzerinde bulunma bağıntısını şöyle tanımlayalım:

$$N \circ d \Leftrightarrow d,\ N \text{ nin bir kenarıdır.}$$

Bu $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ sisteminin bir Afin düzlem olduğunu gösterelim:



Şekil 1.

Farklı iki yüz ancak ve tam bir ayrıtı kenar kabul ederler. Dolayısıyla (A1) sağlanır.

Bir ayrıt ve bu ayrıtı kenar kabul etmeyen bir yüz için, bu yüzün kenarı olan ve verilen ayrıtla aynı yüze kenar olmayan bir tek ayrıt var olduğundan (A2) de sağlanır.

Aynı bir ayrıtı aynı anda kenar kabul etmeyen 3 yüz vardır. Dolayısıyla (A3) de sağlanır.

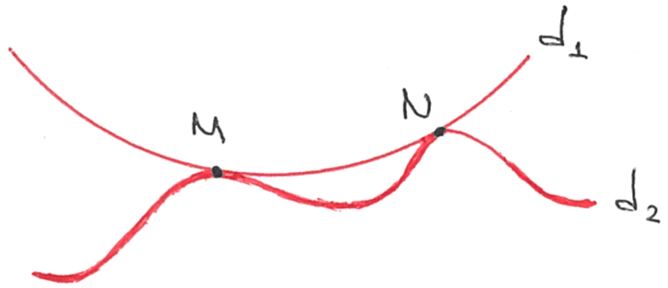
O halde, $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ sistemi bir Afin düzlemdir.

(C−4) $d_1, d_2 \in \mathcal{D}$, $d_1 \neq d_2$ olsun. (P2) gereğince $\exists N \in \mathcal{N}$ vardır, öyleki $N \circ d_1$ ve $N \circ d_2$.

İspatı yapmak için bu özelliği sağlayan başka bir noktanın bulunmadığını göstermek gerekir. $M \circ d_1$ ve $M \circ d_2$ olacak şekilde başka bir $M \in \mathcal{N}$ noktasının bulunduğunu varsayalım. Yani M de d_1 ve d_2 doğrularının üzerinde bir başka nokta ve ayrıca $M \neq N$ olsun. Bu taktirde,

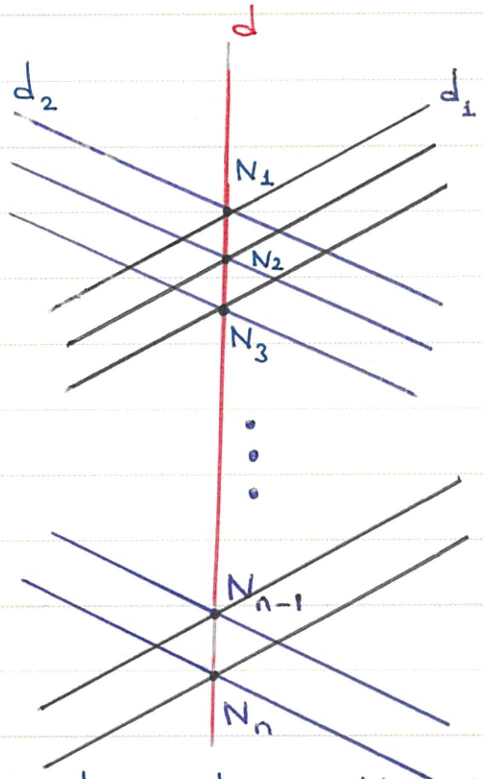
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} N \circ d_1 \\ M \circ d_1 \end{array}\right\} \xRightarrow{(P1)\text{ den}} MN = d_1 \\ \\ \left.\begin{array}{l} N \circ d_2 \\ M \circ d_2 \end{array}\right\} \xRightarrow{(P1)\text{ den}} MN = d_2 \end{array}\right\}$$

dir. Oysa (P1) gereğince iki noktadan bir tek doğru geçtiğinden $d_1 = d_2$ olur. Bu ise hipotezle çelişir. O halde böy bir M noktası yoktur. Yani, farklı iki doğru farklı bir tek noktada kesişir.



C-5) d_1 ve d_2; farklı iki paralel doğru demetine ait doğrular olsunlar. Bu durumda $d_1 \not\parallel d_2$ olup $d_1 d_2 = N_1$ olacak şekilde $N_1 \in \mathcal{N}$ noktası vardır.

En küçük afin düzlemde bir noktadan 3 doğru geçtiğinden d_1 ve d_2 den farklı olarak N_1 den geçen bir başka d doğrusu vardır. Bir doğru üzerinde (Afin düzlemde bir doğru üzerinde) n-tane nokta bulunduğundan dolayı d doğrusu üzerinde n nokta vardır. Bu noktalar $N_1, N_2, \ldots, N_n$ olsun. (A2) aksiyomu gereğince $\forall N_i$ den geçen ve d_1'e paralel olan doğrular ile Her N_i den geçen ve d_2'ye paralel olan olan doğrular vardır. Böylece $\forall N_i$ sayesinde d_1 ve d_2'yi kapsayan paralel doğru demetleri arasında 1-1 ve örten bir fonksiyon kurulmuş olur.



Açıkça paralel doğru demetleri ayrıktır. Bir Afin düzlemde toplam n^2+n tane doğrunun var olduğunu biliyoruz. Her bir paralel doğru demetinde n tane doğru olduğundan

$$\frac{n^2+n}{n} = \frac{\cancel{n}(n+1)}{\cancel{n}} = n+1$$

tane paralel doğru demeti vardır.